

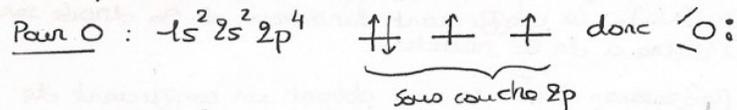
Correction du DM n°4

1 Révisions atomistique MPSI

I Atomistique

1. les règles atomistiques sont :

- Ⓐ le principe de Pauli : 2 e⁻ dans un atome ne peuvent pas avoir deux 4 nombres quantiques égaux.
- Ⓑ la règle de Klechkowski : dans l'état fondamental, l'ordre de remplissage des sous-couches se fait par valeurs (n+l) croissantes, en commençant, pour une valeur n+l donnée, par le plus petit n.
- Ⓒ Règle de Hund : lorsqu'une sous-couche est incomplète, on doit y placer les e⁻ avec le plus possible de spins parallèles.

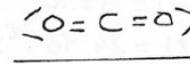
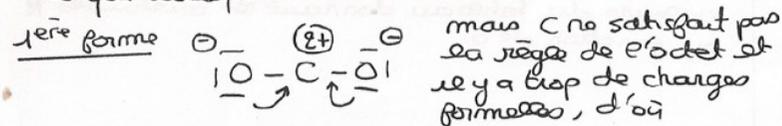


2. Il y a 6 électrons de valence : ceux des sous-couches 2s et 2p

Colonne : bloc p ou 16^e colonne

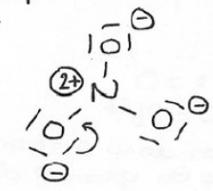
Période : 2^e période car n_{max} = 2

3. Pour CO₂ : N(C) = 4 e⁻ de valence donc la molécule possède en tout 4 + 2x6 = 16 e⁻ de valence ce qui correspond à 8 doublets

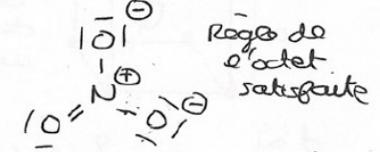


4. Pour NO₃⁻ : N_v(N) = 5 donc N_v(NO₃⁻) = 5 + 6x3 + 1 = 24 ce qui correspond à 12 doublets disponibles.

1^{ère} forme



mais N ne satisfait pas la règle de l'octet et il y a trop de charges formelles; d'où :



5. a) La masse d'un nucléon (neutron ou proton) est presque égale à 1 g.mol⁻¹. Ainsi, si un atome possède A nucléons, sa masse molaire est presque égale à A.

- Pour les éléments légers, il y a autant de protons que de neutrons et donc :

$$A \approx 2Z \quad \text{et donc} \quad M \approx A \approx 2Z \quad (\text{Masse molaire})$$

- Pour les éléments plus lourds, il y a plus de neutrons que de protons pour assurer la stabilité du noyau atomique (sinon il y aurait trop de charges positives). On a donc :

$$A > 2Z \quad \text{d'où} \quad M \approx A > 2Z$$

ce qui est bien le cas pour le Plomb.

b) Soient x, y et z les abondances isotopiques en ²⁰⁶Pb, ²⁰⁷Pb et ²⁰⁸Pb respectivement. Ce sont des nombres réels compris entre 0 et 1. L'énoncé indique que z = 52,4% = 0,524.

Un mole de plomb, c'est à dire une collection de N_A atomes de plomb a un masse $M(\text{Pb}) = 207,21 \text{ g}$. Cette collection comprend :

- $x N_A$ atomes de ^{206}Pb chacun de masse $206/N_A \text{ g}$.
- $y N_A$ atomes de ^{207}Pb chacun de masse $207/N_A \text{ g}$.
- $z N_A$ atomes de ^{208}Pb chacun de masse $208/N_A \text{ g}$.

Ainsi, on peut écrire la masse totale des N_A atomes de plomb (en grammes) :

$$\begin{aligned} M(\text{Pb}) &= x N_A \times \frac{206}{N_A} + x N_A \times \frac{207}{N_A} + x N_A \times \frac{208}{N_A} \\ &= 206x + 207y + 208z \end{aligned}$$

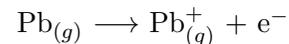
Ensuite on doit avoir $x + y + z = 1$. Connaissant la valeur numérique de z , on en déduit le système d'équations :

$$\begin{cases} 206x + 207y = 98,218 \\ x + y = 0,476 \end{cases}$$

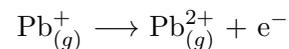
La résolution de ce système donne :

$$x = 0,314 \text{ (31,4\%)} \quad \text{et} \quad y = 0,162 \text{ (16,2\%)}$$

- c) Énergie de première ionisation : c'est l'énergie minimale à fournir à un atome dans une phase gazeuse pour lui arracher un électron, c'est à dire pour provoquer la réaction :



L'énergie de deuxième ionisation est l'énergie minimale à fournir à l'ion $\text{Pb}_{(g)}^+$ obtenu (toujours en phase gazeuse) pour lui arracher un électron selon :



Il faut que l'énergie du photon E_{ph} soit supérieure à $E_I(1)$ ou à $E_I(2)$. Or :

$$E_{\text{ph}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \stackrel{AN}{=} 1,66 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

et

$$E_I(1) = 715 \text{ kJ.mol}^{-1} = \frac{715 \cdot 10^3}{N_A} = 1,2 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

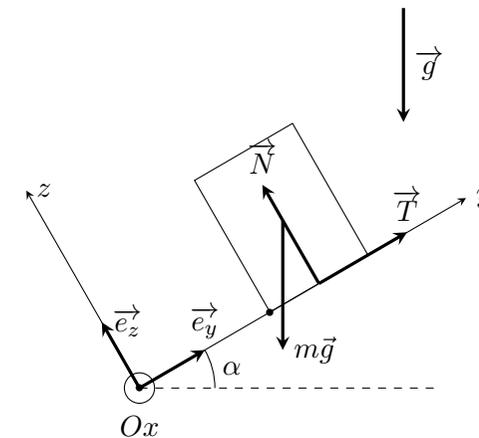
et

$$E_I(2) = 1450 \text{ kJ.mol}^{-1} = \frac{1450 \cdot 10^3}{N_A} = 2,4 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

d'où $E_I(1) < E_{\text{ph}} < E_I(2)$: on peut donc observer la première ionisation mais pas la seconde.

2 Glissement ou basculement d'un bloc

1. On applique le théorème du centre d'inertie au bloc, en l'absence de glissement. Celui-ci est donc en équilibre dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.



Bilan des forces :

- Poids : $m\vec{g} = -mg \cos \alpha \vec{e}_z - mg \sin \alpha \vec{e}_y$
- Réaction du support : $\vec{R} = N \vec{e}_z + T \vec{e}_y$

En l'absence de mouvement et en projection sur (\vec{e}_y, \vec{e}_z) , on obtient :

$$N - mg \cos \alpha = 0 \quad \text{et} \quad T - mg \sin \alpha = 0$$

d'où :

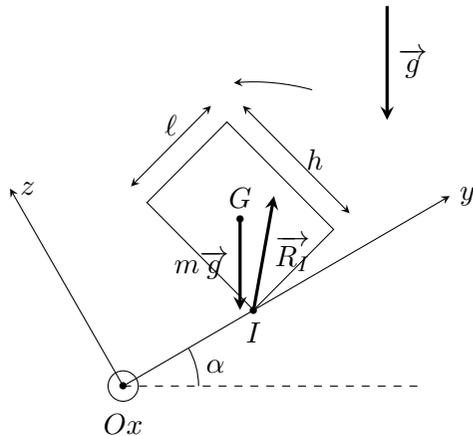
$$N = mg \cos \alpha \quad \text{et} \quad T = mg \sin \alpha$$

L'absence de glissement persiste tant que :

$$\left| \frac{T}{N} \right| < f_s \quad \text{donc} \quad \tan \alpha < f_s$$

2. Au cours de son basculement, le solide n'est soumis qu'à deux forces :

- La réaction du support \vec{R}_I qui s'applique en I , donc $\vec{\mathcal{M}}_I(\vec{R}_I) = \vec{0}$.
- Le poids $m\vec{g}$ qui s'applique en G (barycentre ou centre d'inertie) : $\vec{\mathcal{M}}_I(m\vec{g}) = \vec{IG} \wedge m\vec{g}$.



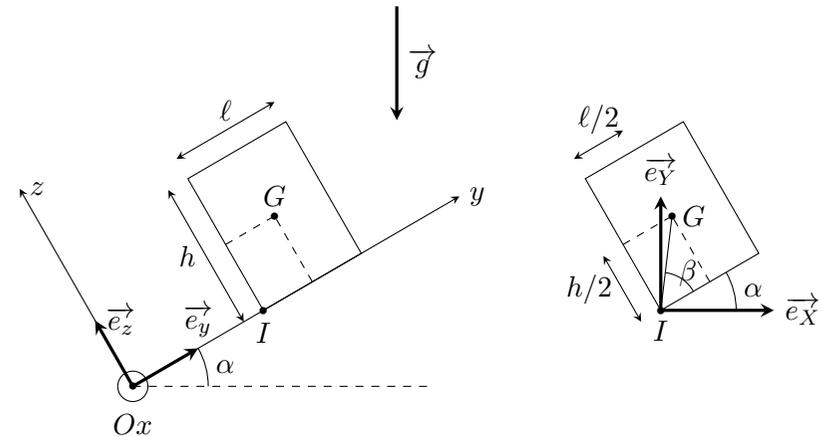
Le théorème du moment cinétique appliqué au solide (en rotation autour de l'axe fixe I_x) dans le référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit :

$$J \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_x = \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{R}_I) + \vec{\mathcal{M}}_I(m\vec{g}) = \vec{IG} \wedge m\vec{g}$$

Au cours du basculement la vitesse angulaire ω augmente à partir d'une valeur initiale nulle. On a donc : $\frac{d\omega}{dt} > 0$, ce qui se traduit par la condition :

$$(\vec{IG} \wedge m\vec{g}) \cdot \vec{e}_x = J \frac{d\omega}{dt} > 0$$

Si on pose que le basculement commence à $t = 0$, ceci doit être vrai aussi lorsque $t \rightarrow 0^+$, c'est à dire au moment où le solide vient de commencer à basculer. Dans la configuration à $t = 0^+$ on a le schéma ci-dessous :



On a donc (figure ci-dessus à gauche) :

$$\vec{IG} = \frac{l}{2} \vec{e}_y + \frac{h}{2} \vec{e}_z$$

et

$$m \vec{g} = -mg \sin \alpha \vec{e}_y - mg \cos \alpha \vec{e}_z$$

ce qui entraîne :

$$(\vec{IG} \wedge m \vec{g}) \cdot \vec{e}_x = mg \left(-\frac{\ell}{2} \cos \alpha + \frac{h}{2} \sin \alpha \right) > 0 \quad (1)$$

d'où

$$\tan \alpha > \frac{\ell}{h} \quad (2)$$

Remarque :

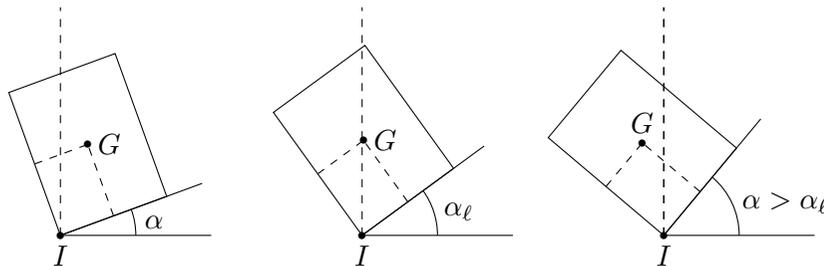
Cette équation a une interprétation géométrique simple (figure ci-dessus à droite). Soit β l'angle que fait IG avec le plan incliné. L'angle que fait IG avec l'horizontale est alors $\alpha + \beta$ et les coordonnées de IG dans la base (\vec{e}_X, \vec{e}_Y) sont :

$$X = IG \cos(\alpha + \beta) \quad \text{et} \quad Y = IG \sin(\alpha + \beta)$$

On a donc :

$$X = IG (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = \frac{\ell}{2} \cos \alpha - \frac{h}{2} \sin \alpha$$

La condition de basculement (1) se traduit donc par : $X < 0$;
Le point G doit donc passer à gauche de la verticale passant par I, ce qui correspond à la figure ci-dessous.



Pas de basculement Limite basculement Instable -> basculement

Ceci peut être le point de départ d'un raisonnement tout à fait valide pour trouver la condition de basculement.

3. Le bloc commence donc à glisser si $\tan \alpha \geq f_s$ mais ne bascule pas si $\tan \alpha < \frac{\ell}{h}$. On donc la double condition :

$$f_s \leq \tan \alpha < \frac{\ell}{h} \quad \text{d'où} \quad f_s h < \ell$$

Application numérique : $\ell_{\min} = f_s h = 0,5 \text{ m}$.

3 Mécanique terrestre

I. Champ de pesanteur terrestre

1. Calculs préliminaires

- a) Le point A est fixe dans (R_T) . Une loi de composition des vitesses conduit donc à :

$$\vec{v}_{A/R_G} = \vec{v}_{A/R_T} + \vec{\omega} \wedge \vec{OA} = \vec{\omega} \wedge \vec{OA}$$

En dérivant cette relation dans (R_G) , nous obtenons (la rotation étant uniforme, $\vec{\omega}$ est constant) :

$$\vec{a}_{A/R_G} = \left[\frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{OA})}{dt} \right]_{R_G} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{A/R_G} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OA})$$

- b) Le vecteur $\vec{\omega}$ étant constant, l'accélération d'entraînement s'écrit donc :

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{A/R_G} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AM}) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OA}) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AM})$$

En utilisant deux fois la factorisation de $\vec{\omega}$ dans les produits vectoriels, on obtient le résultat cherché :

$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge [\vec{OA} + \vec{AM}]) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$$

- c) On utilise $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$ et le fait que $\vec{\omega}$ et \overrightarrow{OH} sont deux vecteurs colinéaires. Il faut ensuite utiliser la formule du double produit vectoriel :

$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HM}) = [\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{HM}] \vec{\omega} - [\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}] \overrightarrow{HM}$$

donc :

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

2. Il faut appliquer le principe fondamental de la dynamique au point matériel M dans le référentiel terrestre (R_T) non galiléen, en tenant compte des forces d'inertie.

$$m \vec{a}_{M/R_T} = -mg_0 \vec{u}_z + m \omega^2 \overrightarrow{HM} - 2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/R_T}$$

En regroupant les deux premiers termes, on peut introduire le vecteur :

$$\vec{g} = -g_0 \vec{u}_z + \omega^2 \overrightarrow{HM}$$

ce qui donne le résultat.

3. a) On projette : $\overrightarrow{HA} = R \cos(\lambda) [\cos(\lambda) \vec{u}_z - \sin(\lambda) \vec{u}_y]$ d'où le résultat :

$$\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = -\omega^2 R \cos(\lambda) \sin(\lambda) \\ g_z = -g_0 + \omega^2 R \cos^2(\lambda) \end{cases}$$

b)

$$\tan \alpha = \left| \frac{g_y}{g_z} \right| = \frac{\omega^2 R \cos(\lambda) \sin(\lambda)}{g_0 - \omega^2 R \cos^2(\lambda)}$$

Application numérique : $g_0 = 9,799 \text{ m.s}^{-2}$. Pour $\lambda = 45^\circ$, on trouve : $\alpha = 0,1^\circ$, ce qui est négligeable.

4. Au Pôle, $\lambda = \pi/2$ et $g_{\text{pôle}} = g_0 \approx 9,799 \text{ m.s}^{-2}$. À l'équateur, $\lambda = 0$ d'où : $g_{\text{équateur}} = g_0 - \omega^2 R = 9,765 \text{ m.s}^{-2}$. La différence est :

$$\Delta g = \omega^2 R = 34.10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$$

La différence observée avec la valeur réelle est due à la non-rotundité de la Terre (aplatissement aux Pôles).

Déviations vers l'Est

5. Dans le repère $(Axyz)$, le vecteur vitesse de M par rapport au référentiel terrestre s'écrit :

$$\vec{v}_{M/R_T} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$$

d'où :

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/R_T} = -2m\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

donc

$$\vec{F}_{ic} = -2m\omega \begin{pmatrix} \dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda \\ \dot{x} \sin \lambda \\ -\dot{x} \cos \lambda \end{pmatrix}$$

En projetant le principe fondamental de la dynamique sur les trois axes du repère, avec $m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$, nous obtenons :

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -2m\omega (\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda) \\ m \ddot{y} = -2m\omega \dot{x} \sin \lambda \\ m \ddot{z} = -mg + 2m\omega \dot{x} \cos \lambda \end{cases}$$

Après simplification on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= -2\omega(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda) \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x}\sin\lambda \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega\dot{x}\cos\lambda \end{cases}$$

6. Une première intégration de ces équations donne, compte-tenu de la vitesse initiale nulle :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -2\omega(z\cos\lambda - y\sin\lambda) + 2\omega L\cos\lambda \\ \dot{y} &= -2\omega x\sin\lambda \\ \dot{z} &= -gt + 2\omega x\cos\lambda \end{cases}$$

En reportant ces expressions dans la première série d'équations de la question 5. et en négligeant tous les termes en ω^2 , il vient :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= 2\omega gt\cos\lambda \\ \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= -g \end{cases}$$

Compte-tenu des conditions initiales, ces équations s'intègrent en :

$$\begin{cases} x &= \frac{\omega g}{3}\cos\lambda t^3 \\ y &= 0 \\ z &= -\frac{g}{2}t^2 + L \end{cases}$$

7. La particule arrive sur le sol à l'instant t_1 tel que $z(t_1) = 0$, ce qui donne :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}} \implies x(t_1) = \frac{2L\omega}{3} \sqrt{\frac{2L}{g}} \cos\lambda$$

Application numérique : $x(t_1) = 4,4$ cm. C'est une déviation extrêmement faible en regard de la hauteur de chute. La mesurer nécessite donc des conditions expérimentales très rigoureuses et très précises, en évitant toutes les perturbations comme le vent, ou la résistance de l'air, ou encore des conditions initiales où la vitesse ne serait pas rigoureusement nulle.